第11回 和田杯

第79回 灘校文化祭

灘校数学研究部

入試模試の数学版として発足したこの企画も11回目となり，恒例企画となりつつあります．制限時間は文化祭が終わるまでの2日間，じっくり考え抜いていただけると幸いです．問題に関する質問はお気軽に受付までどうぞ．答案を書いてくださった方は，受付までお持ちいただくか，裏面記載の Twitter アカウントに答案の写真を送っていただければ正誤判定いたします.（文化祭終了後も Twitter アカウントにお願いします.）5月末をめどに，解答・解説を https://nada-mathclub.jimdofree.com に掲載する予定です．上位者の方はご希望があれば表彰させていただきます.

注意：問題の並び順は難易度とは無関係です．また，訂正がある場合，オンラインで参加される方には Twitter にてお知らせしますのでご確認ください.

1. 正整数 m に対して $d(m)$ で m の正の約数の個数を，$\varphi(m)$ で m 以下の m と互いに素な正整数の個数を，$\sigma(m)$ で m の正の約数の総和を表すとする．このとき次をみたす正整数 n をすべて求めよ.

$$n + d(n) + \varphi(n) = \sigma(n)$$

2. ダワ王国は2つ以上の都市からなり，任意の相異なる2つの都市の間には，いずれか一方の方向にのみ動けるような道路が高々1本かけられている．いくつかの道路に沿って都市から都市に移ることを**訪ねる**と呼ぶ．ある都市に対し，その都市から訪ねることのできる自分以外の都市の数（0でもよい）をその都市の**利便性**と呼ぶ．各都市の利便性を小さい順に並べて数列を作ると，ある隣り合う2項の差が2になった．このとき次を示せ：

- ある相異なる2つの都市 X, Y が存在し，X から Y に訪ねることも Y から X に訪ねることもできない.

3. 不等辺三角形 ABC について，その重心と内心を G, I とするとき，

$$H_{M_{AH_{IBC}}M_{BH_{ICA}}M_{CH_{IAB}}}$$

が直線 GI 上にあることを示せ．ただし，線分 XY の中点を M_{XY}, 三角形 XYZ の垂心を H_{XYZ} で表す.

4. 次を満たす k の最大値を求めよ：

- 2025 個のマス目からなる任意の形状のタイル A について，2026×2026 のマス目に収まるように，重ならないようにマス目に沿って k 個のタイル A を置くことができる.

ここで，いくつかの 1×1 のマスが辺を共有してひと繋がりになったものを**タイル**と呼ぶ．また裏返しや回転によって一致するものは同じタイルとみなす.

5. $a^2 + 1 = b^n$ を満たす正整数 a, b および 2 以上の整数 n の組は存在しないことを示せ．ただしカタラン予想（ミハイレスクの定理）を用いてはならない.

6. n を正整数とする．n 種類のカードがあり，それぞれ表には $1, 2, \cdots, n$ が，裏には $2n, 2n-1, \cdots, n+1$ が書かれている．各種類のカードはそれぞれ無限にある．これらのカードのうち k 枚を全て表向きの状態で左右一列に並べると，任意の k 以下の正整数 i について次が成立した：

- 左から i 番目までの i 枚のカードをとり，その i 枚を 2 つのグループに分ける．またいくつか（0 枚でもよい）のカードを裏返す．このときグループの分け方，裏返し方にかかわらず，2 つのグループそれぞれのカードに見えている数の総和は等しくならない.

このような k としてあり得る最大値が存在するような n の条件と，そのときの最大値を求めよ.

7. $\mathbb{R}_+$ を正の実数全体の集合とする．関数 $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ であって，任意の正の実数 x, y について

$$f(f(x)f(y) + 1) + f(xy + 1) = 1$$

を満たすものをすべて求めよ.

8. 白黒の市松模様に塗られた 2025×2025 のマス目がある．このマス目の辺に沿って，一番左下の点から右または上に 1 マス進むことを繰り返して一番右上の点まで行くような折れ線を引く方法であって，次を満たすものはいくつあるか．

- マス目が折れ線によって分割されてできる 2 つの領域（片方が 0 マスでもよい）のうち，偶数マスのものについて，白のマスと黒のマスの個数が等しい．

9. p を奇素数，$\mathbb{Z}[x]$ を整数係数多項式全体の集合とする．次を満たす $R(x) \in \mathbb{Z}[x]$ をすべて求めよ：

- 任意の $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$ について，$Q(x) \in \mathbb{Z}[x]$ であって，$P(R(x)) - R(Q(x))$ の係数がすべて p の倍数であるようなものが存在する．

10. $\mathbb{N}$ を正の整数全体の集合とする．関数 $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ であって，任意の正の整数 m, n について

$$f^{f(m)}(n) = f(m) + f(m+n)$$

を満たすものをすべて求めよ．ここで f^k は f の k 回合成を表す．

11. $\mathbb{Z}$ を整数全体の集合とする．関数 $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ であって，任意の整数 x, y について $f(x)+y$ が $x^3 + 2xy + y^3 + f(xy)$ を割り切るようなものをすべて求めよ．ここで整数 m が整数 n を割り切るとは，$n = km$ を満たす整数 k が存在することを言う．

12. 鋭角三角形 ABC において，辺 BC の中点を M，$\triangle ABC$ の垂心を H とし，線分 AM と $\triangle BHC$ の外接円の交点を D とする．D を通り BC に平行な直線と AB, AC の交点を E, F とし，A, D を通り EF に接する円と AE, AF が再び交わる点を X, Y とする．D から BC に下ろした垂線の足を Z とし，直線 XZ, YZ が直線 EF と交わる点を P, Q とする．Z に関して M と対称な点を R とする．このとき AD の中点および P, Q を通る円は $\triangle XYR$ の外接円に接することを示せ．

13. 外接円を ω とする鋭角不等辺三角形 ABC について，ω における A の対蹠点を D とする．また ω の D における接線と BC の交点を L とする．ω の中心を O とし，LO と AB の交点を M, LO と AC の交点を N とする．このとき半直線 CM と半直線 DB, 半直線 BN と半直線 DC がそれぞれ交わったので，その交点を X, Y とする．X, Y を通り，それぞれ AB, AC に平行な直線を l_X, l_Y とし，l_X と l_Y，l_X と BC，l_Y と BC の交点をそれぞれ Z, E, F とする．EF 上の点 W であって，$WX = WY$ を満たすものを取ると，Z を通り XY に垂直な直線と直線 DW が交わったので，この点を U とする．$\triangle ABC$ の垂心を H とするとき，$\triangle BCH$ の外接円と $\triangle EUF$ の外接円は接することを示せ．

作問者一覧 (協力ありがとう！)

1. 宮原 **2**. 安齋 **3**. 安齋 **4**. 宮原 **5**. 生田 **6**. 中口 **7**. 宮原 **8**. 宮村，佐藤 **9**. 安齋 **10**. 安齋
11. 濱本 **12**. 加持 **13**. 小矢野，加持

- Twitter アカウント：`@nada_mathclub`
- 数学研究部 HP：`https://nada-mathclub.jimdofree.com`
  `http://nadamath2012.web.fc2.com/index.html`

生徒時代に数研に在籍していらっしゃった和田孫博前校長先生のお名前を冠して始まった本企画も，今年で 11 回目を迎えることとなりました．当初は「入試模試の数学版」と銘打っておりましたが，今となっては入試模試と張り合える有名企画になりつつあるかなと思います．

さて昨年この企画を担当された宮原先輩が卒業され，わたくし安齋が引き継ぐこととなりました．なんと宮原先輩からは今年も 3 題を頂きました．部員に加えて元部員の協力も頂きつつ，今年も和田杯を開催できたことをとてもうれしく思います．

答案の正誤判定については 1 ページ目にお書きした通りですが，今回の和田杯もオンラインでの参加を受け付けております．特に Twitter 上では例年たくさんの方々に解いていただいており，こちらも非常にありがたい限りです．文化祭に来場できないという皆様も是非ご参加ください．一人でも多くの皆様のご参加を心待ちにしています．それでは！Good Luck！

文責 高校 3 年 安齋一畝